Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
16. Oktober 2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 2

Abgabe: 23. Oktober 2017 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (1+2 Punkte)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die von den X_n erzeugte Filtration.

(a) Nehmen Sie an, dass die X_n alle den Erwartungswert 1 haben.
Zeigen Sie, dass die Folge der $P_n := \prod_{i=1}^n X_i, P_0 := 1$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bildet.

(b) Nehmen Sie an, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ der Erwartungwert $\mathbb{E}X_i = 0$ ist und $\sigma_i^2 := \operatorname{Var} X_i < \infty$ ist. Zeigen Sie, dass mit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ die Folge der

$$M_n := S_n^2 - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist. Die leere Summe ist als 0 definiert.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Z_∞ sei eine integrierbare Zufallsvariable und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Zeigen Sie, dass die Folge der

$$Z_n := \mathbb{E}[Z_\infty|\mathcal{F}_n], n \in \mathbb{N}_0$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bildet.

Aufgabe 3 (2+3 Punkte)

(a) Es sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein quadratisch integrierbares Martingal (d.h. es gelte $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$ für alle $n \geq 0$). Zeigen Sie, dass die Zuwächse

$$\Delta M_n := M_n - M_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

paarweise unkorreliert sind.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a) ein schwaches Gesetz der großen Zahlen für Martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter der Annahme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(\Delta M_n)^2 < \infty$, d.h. zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn für jedes $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left(f(x, y+1) + f(x, y-1) + f(x-1, y) + f(x+1, y)\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass jede beschränkte harmonische Funktion konstant ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede nicht-negative harmonische Funktion konstant ist.

Hinweis: Betrachten Sie die einfache symmetrische Irrfahrt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ auf $\mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass wenn f harmonisch ist, $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal ist.